ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XII Сем. **№ 144.** № 12.

НЕ-ЭВКЛИДОВСКІЯ ГЕОМЕТРІИ.

(Окончаніе).

Большинство математиковъ, смотритъ на геометрію Лобачевскаго какъ на логическій курьезъ; нѣкоторые изъ нихъ, однакожъ, пошли далѣе. Такъ какъ возможно нѣсколько геометрій, то можемъ-ли мы быть увѣрены, что истинная между ними — именно наша обыкновенная геометрія? Опытъ показываетъ, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ; — но это потому, что имѣемъ дѣло лишь съ треугольниками слишкомъ малыхъ размѣровъ. Разность, согласно Лобачевскому, пропорціональна площади треугольника и, быть можетъ, сдѣлалась-бы ощутительною когда бы мы приняли во вниманіе треугольники очень большихъ размѣровъ или когда бы пріемы измѣреній стали болѣе точными. Въ такомъ случаѣ, геометрія Эвклида была бы только предварительной геометріей. Чтобы вникнуть въ этотъ вопросъ, нужно понять, въ чемъ заключается сущность геометрическихъ аксіомъ. Суть ли это сужденія синтетическія a priori, какъ сказалъ бы Кантъ? — Въ такомъ случаѣ онѣ завладѣли бы нами съ такою силою, что мы не имѣли бы возможности ни постичь предложеній, имъ противоположныхъ, ни строить на таковыхъ теоретическіе выводы; слѣд., тогда бы не было не-Эвклидовскихъ геометрій. Чтобы убѣдиться въ сказанномъ, достаточно взять сужденіе дѣйствительно синтетическое a priori; напр. такое: если имѣемъ безконечный рядъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, различныхъ между собою, то въ немъ всегда найдется одно число, меньше прочихъ; — или другое, эквивалентное ему: если нѣкоторая теорема справедлива для числа 1 и если было доказано, что она вѣрна для $n+1$,

коль скоро она вѣрна для n,—то она будетъ справедлива для всѣхъ положительныхъ чиселъ. Пусть попробуютъ отвлечься отъ этихъ сужденій и основать на отрицаніи ихъ ложную ариѳметику, аналогичную не-Эвклидовымъ геометріямъ. Это окажется немыслимымъ.

Возвратимся къ нашимъ фиктивнымъ существамъ безъ толщины. Если только они одарены умомъ, подобнымъ нашему, то мы не можемъ допустить, чтобы они приняли Эвклидову геометрію, которая для нихъ идетъ въ разрѣзъ съ опытомъ.

Съ другой стороны, должны ли мы заключить, что геометрическія аксіомы — истины экспериментальныя? Надъ идеальными прямыми или окружностями нельзя производить опытовъ: имъ поддаются только матеріальные предметы. Надъ чѣмъ же производились бы тѣ опыты, на коихъ основана геометрія? Отвѣтъ легокъ. Мы видѣли выше, что геометрическія фигуры въ разсужденіяхъ уподобляются твердымъ тѣламъ; свойства, заимствованныя геометріей изъ опыта, суть свойства послѣднихъ. Если бы геометрія была экспериментальной наукой, она не была бы точна и постоянно подвергалась бы пересмотру и усовершенствованію. Болѣе того: нынѣ мы убѣдились бы въ ошибочности геометрическихъ выводовъ, ибо знаемъ, что не существуетъ твердыхъ тѣлъ, въ точности неизмѣняемыхъ.

Слѣдовательно, *геометрическія аксіомы не представляютъ собою ни синтетическихъ сужденій a priori, ни экспериментальныхъ фактовъ. Это суть условія* (conventions). Въ выборѣ между различными условіями мы *руководствуемся* опытными фактами, но самъ по себѣ выборъ остается *свободнымъ* и ограниченъ только необходимостью избѣгать противорѣчій. Такимъ образомъ постулаты могутъ оставаться *истинными въ точности* даже въ томъ случаѣ, когда экспериментальные законы, опредѣлившіе ихъ, вѣрны лишь по приближенію. Иными словами, *геометрическія аксіомы* (я не говорю объ аксіомахъ ариѳметики) *суть не что иное, какъ замаскированныя опредѣленія.* Слѣдовательно, вопросъ объ истинности геометріи Эвклида не имѣетъ никакого смысла. Подобно этому мы могли бы задаться вопросами: истинна ли метрическая система и ложны ли прежнія мѣры; истинны ли Декартовы координаты, а полярныя ложны и пр. Одна геометрія не можетъ быть истиннѣе другой; она можетъ быть лишь болѣе удобна. И геометрія Эвклида и теперь и навсегда останется наиболѣе удобною, ибо, во 1-хъ, она проще всѣхъ другихъ, не только вслѣдствіе привычекъ нашего ума или какого бы то ни было непосредственнаго воспріятія Эвклидова пространства, но проще сама по себѣ точно такъ, какъ многочленъ первой степени проще многочлена второй степени; во 2-хъ, потому, что она согласуется довольно хорошо со свойствами твердыхъ тѣлъ, къ которымъ приближаются части нашего тѣла, нашъ глазъ, и которыми мы пользуемся для изготовленія нашихъ измѣрительныхъ приборовъ.

Вопросъ былъ разсмотрѣнъ и съ другой еще точки зрѣнія. Если бы геометрія Лобачевскаго была истинна, параллаксъ весьма удаленной звѣзды былъ бы величиною конечною; въ случаѣ истинности геом. Риманна—онъ былъ бы отрицателенъ. Эти результаты подлежали опытной провѣркѣ, и потому надѣялись, что астрономическія наблюденія помогутъ рѣшить вопросъ о трехъ геометріяхъ.

Прямой линіей въ астрономіи считаютъ траэкторію луча свѣта. Потому, если бы (допуская невозможное) пришли къ открытію отрицательнаго параллакса, или же къ доказательству, что всѣ параллаксы больше нѣкоторой предѣльной величины, пришлось бы дѣлать выборъ между двумя заключеніями: либо отказаться отъ геометріи Эвклида, либо измѣнить законы оптики и принять, что свѣтъ распространяется не въ точности по прямой линіи. Безполезно прибавлять, что это второе рѣшеніе всѣмъ показалось бы болѣе удобнымъ. Слѣдовательно, Эвклидовой геометріи нечего опасаться будущихъ наблюденій.

Въ заключеніе позволю себѣ маленькій парадоксъ. Существа, одаренныя такимъ же умомъ, какъ и мы, и такими же органами чувствъ, но не получившія никакого предварительнаго образованія, могли бы воспринять изъ внѣшняго міра прилично выбраннаго, такія ощущенія, которыя привели бы ихъ къ созданію системы другой геометріи, а не Эвклидовой, и локализировали бы явленія этого внѣшняго міра въ пространствѣ не-Эвклидовскомъ или даже въ пространствѣ 4-хъ измѣреній. Для насъ, воспитанныхъ соотвѣтственно нашему дѣйствительному міру, не представляло бы затрудненія отнести къ пространству Эвклидову явленія этого новаго міра, если бы мы внезапно перенеслись туда. Кто посвятилъ бы себя этому міру, быть можетъ, пришелъ бы къ возможности представить себѣ четвертое измѣреніе. Боюсь, что послѣднія строки не всѣмъ покажутся достаточно понятными; но выясненія потребовали бы новыхъ распространеній, которымъ здѣсь не мѣсто; тѣмъ же, кто интересуется развитіемъ этихъ идей, совѣтую обратиться къ Гельмгольтцу.

При моемъ стараніи быть краткимъ, я утверждалъ болѣе, нежели доказалъ; да проститъ мнѣ это читатель. По этому вопросу столько написано и высказано столько различныхъ мнѣній, что разборъ ихъ потребовалъ бы цѣлаго тома" *H. Poincaré.*

Прим. редакціи. Вслѣдъ за тѣмъ въ № 1 отъ 15 января 1892 г. того же журнала „Revue Générale des sciences" было напечатано слѣдующее письмо инженера Mouret по поводу эмпирическихъ доктринъ, высказанныхъ г. Poincaré въ его статьѣ о не-Эвклидовскихъ геометріяхъ.

„Съ давнихъ поръ въ извѣстныхъ сферахъ фигурируетъ вопросъ о томъ, представляютъ ли основные законы или аксіомы, встрѣчаемыя въ первыхъ началахъ геометріи, выводы индуктивные, основанные на внѣшнихъ фактахъ, или же неизъяснимыя потребности нашего ума; иными словами, истинны ли эти аксіомы лишь относительно, или безусловно (абсолютно). Школа Стюарта

Милля поддерживаетъ первое изъ этихъ мнѣній; второе — горячо отстаивается метафизиками и математиками. Ихъ, однако же, всегда затрудняло одно обстоятельство съ тѣхъ поръ, какъ Эвклидъ призналъ постулатомъ одну изъ аксiомъ геометрiи *), и это затрудненiе замѣтно усложнилось, когда геометры показали, что отрицанiе этого постулата не составляетъ отрицанiя геометрическихъ разсужденiй, ибо можно написать весьма послѣдовательное сочиненiе, исходя изъ произвольныхъ положенiй.

Въ виду этого г. Poincaré рѣшился отбросить метафизическiй принципъ неотъемлемыхъ потребностей человѣческаго ума, по крайней мѣрѣ въ области геометрiи. Для него геометрическiя аксiомы — ни синтетическiя сужденiя a priori, ни эмпирическiе факты; это только условныя понятiя или опредѣленiя. Но такъ какъ ученый геометръ хорошо знаетъ, что законы реальныхъ тѣлъ не представляются условными, то онъ исправляетъ или дополняетъ свое мнѣнiе, предполагая, что между всевозможными условными понятiями нашъ выборъ руководствуется опытными фактами.

Таково признанiе, которое сдѣлано г. Poincaré въ его столь ясной и изящной статьѣ о не-Эвклидовыхъ геометрiяхъ, и которое непосредственно приводитъ къ геометрическому эмпиризму. Въ самомъ дѣлѣ, смотря по тому, будетъ ли нашъ выборъ, остающiйся свободнымъ, направленъ на экспериментальные факты или нѣтъ, мы построимъ или старую и дѣйствительную геометрiю Эвклида, или блестящую, но фиктивную геометрiю Лобачевскаго или Риманна, ибо первая изъ нихъ будетъ основана на данныхъ, предложенныхъ самой природой, въ то время какъ вторая — на положенiяхъ, произвольно созданныхъ нашимъ умомъ. Теперь вопросъ — какъ же назвать всякiя умозрительныя теорiи, исходящiя изъ фиктивныхъ положенiй? какъ бы мы назвали такую, напр., термодинамику, которая была бы основана на понятiи отрицательныхъ температуръ или обратной пропорцiональности давленiй квадратамъ объемовъ? Какъ мы называемъ представленiе на сценѣ фиктивныхъ фактовъ, почерпнутыхъ изъ дѣйствительной жизни? Какое названiе даютъ стихотворному изложенiю ощущенiй, никогда въ дѣйствительности не пережитыхъ? Забава ума, драма, поэзiя и вообще *искусство* — вотъ та область, къ которой мы всегда относимъ всѣ наши фиктивныя представленiя. Такимъ образомъ, не-Эвклидовскiя геометрiи представляютъ ничто иное, какъ своего рода геометрическую поэзiю или умственное развлеченiе, если только ихъ основы

---

*) Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что значительная часть затрудненiй, возбужденныхъ постулатомъ Эвклида, обусловливается тѣмъ, что опредѣленiя прямой линiи и параллельности даны греч. геометромъ не съ одной и той же точки зрѣнiя, какъ бы это слѣдовало. Эвклидъ былъ въ правѣ опредѣлить прямую, какъ всякую линiю, способную «налагаться на самое себя» (его опредѣленiе), но въ такомъ случаѣ онъ долженъ былъ опредѣлить параллельныя линiи, какъ «всякую группу прямыхъ, способную налагаться на самое себя». Что же касается вопроса о точкѣ встрѣчи параллельныхъ, то таковой относится къ идеямъ предѣльныхъ положенiй и касательныхъ линiй. *Прим. авт.*

отчасти условны, что утверждаетъ г. Риманнъ и въ чемъ нельзя сомнѣваться. Это — нѣчто въ родѣ игры въ карты или шахматы, въ которыхъ правила ходовъ и положеній были бы усложнены и роль фигуръ или картъ сдѣлана болѣе равномѣрною. Слѣдовательно, попыткамъ не-Эвклидовскихъ геометрій слѣдуетъ приписать такое же значеніе, какое имѣетъ вообще всякая затѣя, способная сдѣлаться источникомъ развлеченій и удовольствій. Внѣ этой области чистой эстетики есть только одна геометрія—Эвклидова, ибо она одна основывается на реальной объективности и, такимъ образомъ, соподчинена прогрессу нашихъ опытныхъ познаній. Истинное знаніе, точное или эмпирическое, есть изученіе природы, а не упражненіе въ логикѣ на тему условныхъ и фиктивныхъ предметовъ. Аксіомы дедуктивныхъ наукъ, подобно законамъ физики, независимы въ своихъ началахъ отъ нашей воли и фантазіи; если онѣ не суть необходимости нашего умозрѣнія, какъ Эвклидовъ постулатъ, то онѣ могутъ быть лишь выраженіемъ фактовъ.“ *George Mouret.*

Прим. редакціи. Вслѣдствіе этой замѣтки въ № 2 (отъ 30 января 1892 г.) того же журнала г. Poincaré помѣстилъ нижеслѣдующее письмо:

„Я старался выдѣлить существенную роль опыта въ происхожденіи математическихъ понятій, но въ то же время я хотѣлъ показать, что эта роль ограничена предѣломъ. Для достиженія этой двоякой цѣли, фикціи Риманна и Бельтрами, о которыхъ я бесѣдовалъ, могутъ оказать нѣкоторую услугу: въ самомъ дѣлѣ, онѣ помогаютъ воображенію побѣдить привычки, созданныя ежедневнымъ наблюденіемъ и настолько укоренившіяся, что онѣ какъ будто стали обязательными для нашего ума. Вотъ еще одна изъ такихъ фикцій, которая мнѣ кажется довольно занимательной.

Вообразимъ сферу S и внутри ея такую среду, которой показатель преломленія и температура перемѣнны. Пусть въ этой средѣ перемѣщаются предметы, теплоемкость которыхъ на столько мала, а передвиженія такъ медленны, что они могутъ тотчасъ же прійти въ тепловое равновѣсіе съ окружающею ихъ средою. Допустимъ еще, что коэффиціентъ расширенія всѣхъ предметовъ одинаковъ, такъ что мы можемъ опредѣлять абсолютную температуру длиною одного изъ нихъ. Назовемъ радіусъ сферы черезъ R, а черезъ ρ разстояніе нѣкоторой точки отъ ея центра и допустимъ, что абсолютная температура въ этой точкѣ $= R^2 - \rho^2$, а показатель преломленія $\frac{1}{R^2 - \rho^2}$. Тогда существамъ, не выходящимъ никогда изъ предѣловъ такого міра, казалось бы, что размѣры перемѣщающихся тѣлъ остаются неизмѣнными, такъ какъ они измѣнялись бы *въ одномъ и томъ же смыслѣ* вслѣдствіе одинаковости ихъ коэффиціентовъ расширенія; эти существа не имѣли бы никакого понятія о различіи температуры и никакой термометръ не обнаружилъ бы имъ его, ибо расширеніе оболочки

и термометрической жидкости было бы одно и то же. Они полагали бы, что сфера S безконечна: никогда не достигли бы они ея поверхности, ибо по мѣрѣ приближенія къ ней они вступали бы въ области болѣе холодныя, сами становились бы все меньше и, не подозрѣвая этого, дѣлали бы все меньшія и меньшія передвиженія. Прямыми линіями у нихъ служили бы окружности, перпендикулярныя къ сферѣ S,—и по тремъ причинамъ: 1) это были бы траэкторіи лучей свѣта; 2) измѣряя при помощи нѣкотораго метра длину различныхъ кривыхъ, наши существа пришли бы къ заключенію, что такія окружности представляютъ кратчайшіе пути отъ одной точки къ другой; дѣйствительно, ихъ метръ расширялся бы или сокращался при переходѣ изъ одной области въ другую, чего они не подозрѣвали бы вовсе; 3) если бы нѣкоторое твердое тѣло вращалось такъ, чтобы одна изъ его линій оставалась неподвижною, то такой линіей могла бы быть только одна изъ такихъ окружностей. Точно также если бы цилиндръ, медленно вращающійся около двухъ стержней, нагрѣвался съ одной стороны, то мѣсто его неподвижныхъ точекъ представляло бы не прямую, а кривую, выпуклую съ нагрѣваемой стороны.)

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что наши воображаемыя существа приняли бы геометрію Лобачевскаго.

Но я уклонился отъ предмета моего письма. Эти соображенія способны показать важность наблюденій и обнаруживаютъ то, что сближаетъ меня съ г. Mouret. Однако же, я долженъ указать и на различія.

Можетъ ли наблюденіе *само по себѣ* породить математическія понятія и, не доходя подобно г. Mouret до основнаго понятія равенства, *само по себѣ* дать намъ понятіе о математической непрерывности? Чтобы имѣть право сомнѣваться въ томъ, достаточно глубже вникнуть въ различіе между непрерывностью физическою и математическою. Мы не можемъ отличить вѣса A въ 10 гр. отъ вѣса B въ 11 гр. также точно, какъ и этого послѣдняго отъ вѣса C въ 12 гр.; но ощущаемъ разницу между вѣсами A и C. Наблюденія, переведенныя на языкъ уравненій, даютъ

$$A = B;\quad B = C;\quad A < C.$$

Вотъ формула физической непревывности, между тѣмъ какъ математическая непрерывность выразилась бы такъ:

$$A < B < C.$$

Но г. Mouret въ своей статьѣ, помѣщенной въ „Revue Philosophique", идетъ гораздо далѣе: онъ налегаетъ на первоначальное понятіе о равенствѣ и старается показать, что оно произошло изъ наблюденій. Я одобряю многое въ его статьѣ, особенно мысль, что идея пространства—не проста, и что всѣ математическія идеи сводятся къ категоріямъ отношенія, подобія, различія и обособленности. Съ большимъ интересомъ я прочелъ различные его доводы, но не

могу не замѣтить, что наиболѣе характерныя изъ нихъ изложены раньше въ „Zahlen und Messen" Гельмгольтца; различны лишь выводы. Притомъ я не могу допустить будто предложеніе: „двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собою" — есть опытный фактъ, который могъ бы быть отмѣненъ когда нибудь точными наблюденіями. Я предпочитаю согласиться съ Гельмгольтцомъ, что мы всему тому даемъ названіе равенства, что согласуется во внѣшнемъ мірѣ съ предвзятой идеей, какую имѣемъ о равенствѣ математическомъ" *H. Poincaré* (de l'Institut).

ФОРМУЛЫ СТЕКОЛЪ.

Цѣль предлагаемой замѣтки заключается въ изложеніи простѣйшаго способа построенія формулъ сферическихъ стеколъ. Этотъ способъ основанъ на слѣдующихъ двухъ фактахъ, которые съ надлежащею удовлетворительностью устанавливаются первый эмпирически, второй умозрительно.

Первый фактъ. Лучи, выходящіе изъ свѣтящейся точки, послѣ двукратнаго преломленія въ стеклѣ, или пересѣкаются между собою въ одной и той же точкѣ (дѣйствительная точка схожденія лучей), или выходятъ по такимъ направленіямъ, продолженія которыхъ всѣ пересѣкаются между собою въ одной и той же точкѣ (мнимыя точки схожденія лучей).

Въ томъ случаѣ, когда источникъ свѣта находится въ безконечности (солнце), при чемъ стекло установлено такъ, что линія, соединяющая центры его поверхностей (главная оптическая ось) имѣетъ направленіе лучей свѣта, точка схожденія лучей получаетъ названіе главнаго фокуса.

Главный фокусъ лежитъ на главной оптической оси.

Второй фактъ. Точка, раздѣляющая линію центровъ сферическаго стекла на части прямо пропорціональныя радіусамъ поверхностей, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что лучъ свѣта, прошедшій черезъ эту точку, выходитъ изъ стекла по направленію параллельному первоначальному.

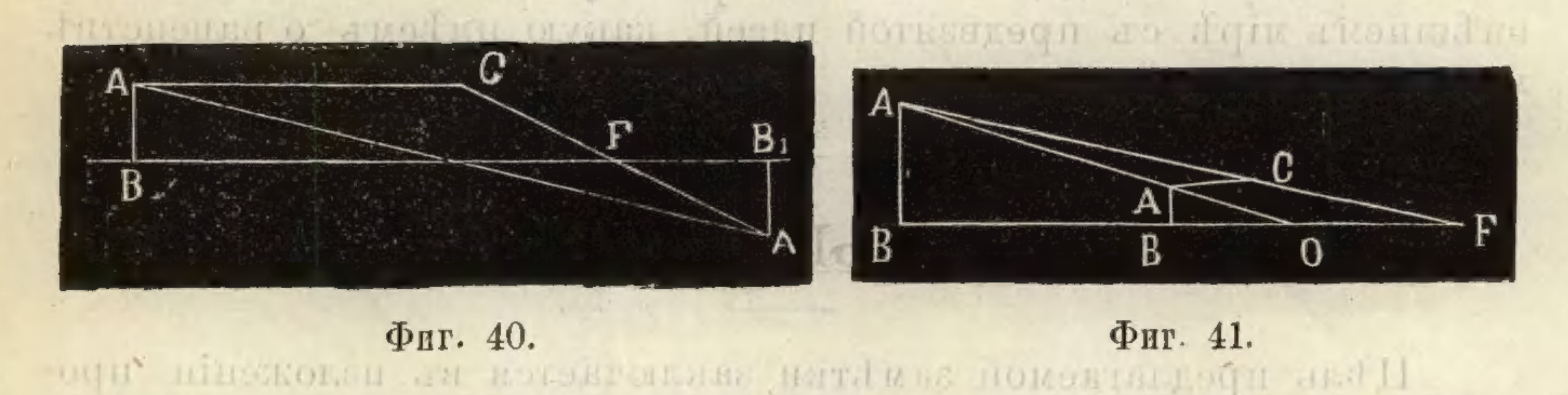
По причинѣ незначительности толщины стекла это направленіе считаютъ совпадающимъ съ первоначальнымъ. Упомянутая точка лежитъ или внутри стекла или на его поверхности; ее называютъ оптическимъ центромъ стекла.

Формула собирающихъ стеколъ.

Пусть O будетъ оптическій центръ стекла, F его главный фокусъ, A свѣтящаяся точка.

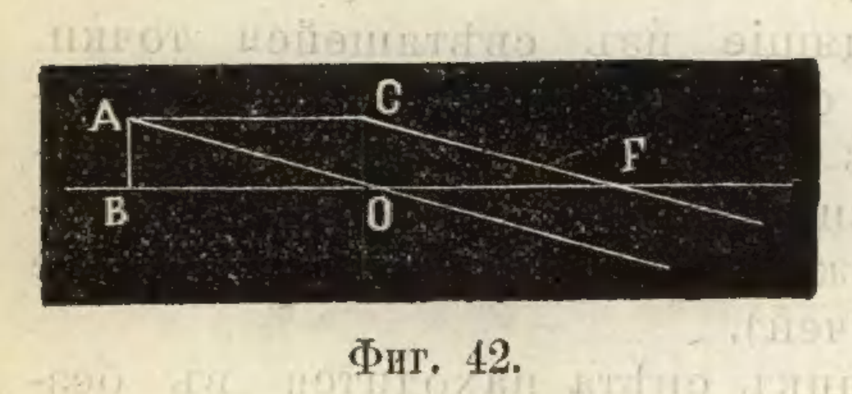
Лучъ AC, параллельный главной оптической оси OF, послѣ двукратнаго преломленія въ стеклѣ долженъ пройти черезъ точку F.

Пусть его направленіе будетъ CF, при чемъ C означаетъ точку пересѣченія прямыхъ AC и CF. Лучъ AO проходитъ черезъ стекло безъ преломленія. Его направленіе по выходѣ изъ стекла представляетъ собою продолженіе AO. Пусть AO и CF пересѣкаются между собою въ точкѣ A_1. Въ этой точкѣ сойдутся и всѣ другіе лучи, вышедшіе изъ точки A. Точка схожденія



Фиг. 40. Фиг. 41.

A_1 будетъ дѣйствительная, когда $AC > OF$ (фиг. 40), мнимая, когда $AC < OF$ (фиг. 41); она будетъ безконечно удалена при $AC = OF$ (фиг. 42).



Фиг. 42.

Треугольники ACA_1 и OFA_1 подобны между собою, а также и треугольники AOB и A_1OB_1, поэтому

$$\frac{AC}{OF} = \frac{AA_1}{OA_1} \text{ и } \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}.$$

Отсюда, сообразно тому, будетъ ли A_1 дѣйствительная или мнимая точка схожденія лучей, находимъ:

$$\frac{AC}{OF} - 1 = \frac{OA}{OA_1} \qquad 1 - \frac{AC}{OF} = \frac{OA}{OA_1}$$

$$\frac{AC}{OF} - 1 = \frac{OB}{OB_1} \qquad 1 - \frac{AC}{OF} = \frac{OB}{OB_1}$$

Точки O и C находятся внутри стекла, а стекло имѣетъ незначительную толщину, поэтому можно положить $AC = OB$ и тогда будемъ имѣть

$$\frac{OB}{OF} - 1 = \frac{OB}{OB_1} \quad \text{или} \quad 1 - \frac{OB}{OF} = \frac{OB}{OB_1} \text{ или}$$

$$\frac{1}{OB} + \frac{1}{OB_1} = \frac{1}{OF} \qquad \frac{1}{OB} - \frac{1}{OB_1} = \frac{1}{OF}$$

Эти формулы остаются справедливыми, гдѣ бы точка A на перпендикулярѣ AB ни была дана; поэтому онѣ будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда допустимъ, что точка A совпа-

даетъ съ B. Это значитъ, что если свѣтящаяся точка помѣщается въ B, то точка схожденія будетъ B_1. Пусть

$$OB = d, \quad OB_1 = f, \quad OF = F$$

будемъ имѣть

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Первая изъ этихъ формулъ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда B_1 дѣйствительная точка схожденія, вторая—тому случаю, когда она мнимая. Мы видимъ, что вторая формула выводится изъ первой посредствомъ замѣны f черезъ $-f$.

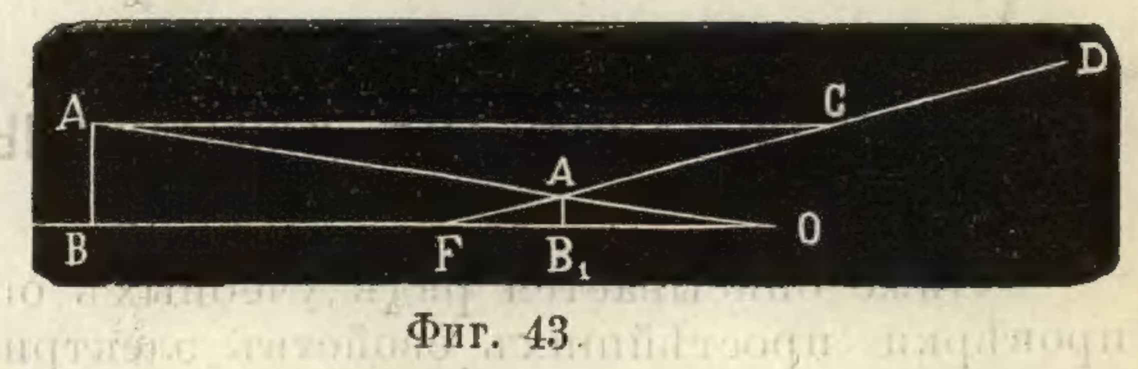
Отсюда слѣдуетъ, что формулой

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

можно пользоваться во всѣхъ случаяхъ (не исключая и случая AC = OF или $f = F$), если только условимся предварительно отрицательныя значенія f отсчитывать отъ O въ ту сторону, гдѣ находится свѣтящаяся точка.

Формула разсѣявающихъ стеколъ.

Пусть O оптическій центръ стекла, F его главный фокусъ, A свѣтящаяся точка (фиг. 43).



Фиг. 43.

Лучъ AC, параллельный главной оптической оси, послѣ двукратнаго преломленія въ стеклѣ долженъ пойти по направленію CD, продолженіе котораго проходитъ черезъ точку F. Точка C, въ которой пересѣкаются лучи AC и CD, находится внутри стекла. Лучъ AO проходитъ черезъ стекло безъ преломленія. Пусть AO и CF пересѣкаются между собою въ точкѣ A_1. Точка A_1 есть искомая точка схожденія лучей. Пусть AB и A_1B_1 будутъ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ A и A_1 на главную оптическую ось OF. Изъ подобія треугольниковъ ACA_1 и OFA_1, а также AOB и A_1B_1O находимъ

$$\frac{AC}{OF} = \frac{AA_1}{OA_1}, \quad \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}.$$

Прибавимъ къ каждой части первой пропорціи по единицѣ, получимъ:

$$\frac{AC}{OF} + 1 = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}.$$

По причинѣ незначительности толщины стекла можно положить

$$AC = OB.$$

Тогда предыдущая формула обратится въ такую

$$\frac{OB}{OF} + 1 = \frac{OB}{OB_1},$$

откуда

$$\frac{1}{OB_1} - \frac{1}{OB} = \frac{1}{OF}.$$

Эта формула остается справедливою, гдѣ бы точка A на перпендикулярѣ AB ни была дана. Поэтому можно допустить, что точка A совпадаетъ съ B. Такъ какъ одновременно съ этимъ и A_1 сливается съ B_1, то точка B_1 есть искомая мнимая точка схожденія лучей выходящихъ изъ B.

Положивъ

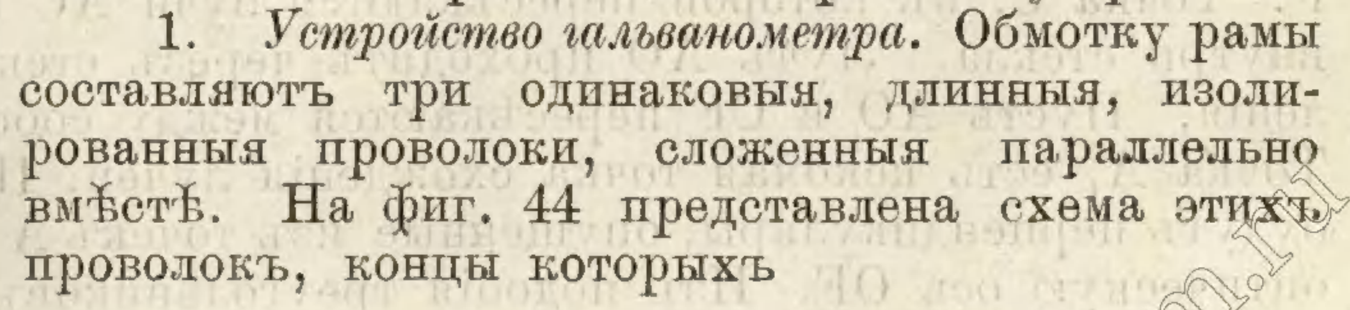
$$OB = d, \quad OB_1 = f, \quad OF = F$$

получимъ

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F}.$$

Это и есть формула разсѣявающихъ стеколъ.

Учит. Тамбовскаго реальн. уч. *П. Флоровъ.*



ГАЛЬВАНОМЕТРЪ ДЛЯ УЧЕБНЫХЪ ЦѢЛЕЙ.

Ниже описывается рядъ учебныхъ опытовъ, служащихъ для провѣрки простѣйшихъ свойствъ электрическаго тока, вытекающихъ изъ закона Ома. Всѣ описываемые опыты можно произвести съ однимъ и тѣмъ же гальванометромъ весьма простого устройства.



Фиг. 44.

1. *Устройство гальванометра.* Обмотку рамы составляютъ три одинаковыя, длинныя, изолированныя проволоки, сложенныя параллельно вмѣстѣ. На фиг. 44 представлена схема этихъ проволокъ, концы которыхъ

$$a, b, c \quad \text{и} \quad \alpha, \beta, \gamma$$

выходятъ въ особые зажимы, причемъ каждый конецъ любой проволоки можно скоро и удобно соединить съ любымъ концомъ всякой другой проволоки. На фиг. 45 изображенъ коммутаторъ, который можетъ служить для этой цѣли. Концы проволокъ соединены соотвѣтственно съ шестью латунными секторами


Фиг. 45.

$$a,\ b,\ c \quad \text{и} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

расположенными такъ, что секторъ любого конца, напр. a, прилегаетъ къ четыремъ секторамъ

$$b,\ c \quad \text{и} \quad \beta,\ \gamma,$$

принадлежащимъ концамъ двухъ другихъ проволокъ. Вставленіемъ штемпеля можно, такимъ образомъ, соединить конецъ a первой проволоки съ любымъ концомъ двухъ другихъ.

Прочія условія конструкціи прибора для нашей цѣли безразличны.

Такой гальванометръ, годясь для тѣхъ же цѣлей, какъ и обыкновенный, позволяетъ въ то же время, при помощи различныхъ соединеній трехъ проволокъ, измѣнять довольно разнообразно сопротивленіе обмотки. Если черезъ r обозначимъ сопротивленіе каждой проволоки, то, дѣлая различныя соединенія этихъ проволокъ (параллельныя, послѣдовательныя и смѣшанныя), можно получить сопротивленія

$$\frac{r}{3},\ \frac{r}{2},\ r,\ \frac{3r}{2},\ 2r,\ 3r,$$

изъ которыхъ послѣднее въ девять разъ больше перваго.

Этотъ же гальванометръ позволяетъ произвести весьма удобно рядъ учебныхъ опытовъ, демонстрирующихъ тѣ простыя свойства тока, которыя вытекаютъ изъ закона Ома. Ниже и описываются главнѣйшіе изъ этихъ опытовъ.

2. *Одинаковость силы тока вдоль изолированной проволоки.* Соединивъ вмѣстѣ концы a и b двухъ проволокъ, сообщимъ другіе ихъ концы α и β съ полюсами батареи. Токъ въ двухъ проволокахъ

$$aA\alpha \quad \text{и} \quad bB\beta$$

будетъ обѣгать раму въ противоположныхъ направленіяхъ и неподвижность магнита гальванометра покажетъ одинаковость силы этихъ токовъ.

Полезно произвести контрольный опытъ, показывающій, что равновѣсіе магнита происходитъ не отъ отсутствія тока, а отъ равенства противоположныхъ дѣйствій тока въ двухъ оборотахъ. Для этого достаточно немного измѣнить только что указанное соединеніе проволокъ: соединивъ концы b и α двухъ проволокъ, сообщимъ другіе ихъ концы β и a съ полюсами батареи. Тотъ же токъ пойдетъ въ тѣхъ же двухъ проволокахъ, но уже обѣжитъ раму въ одномъ направленіи и равновѣсія магнита не будетъ.

3. *Свойство токовъ, сходящихся въ одной точкѣ.* (Первая теорема Кирхгофа). Соединимъ вмѣстѣ концы a, b, c всѣхъ трехъ проволокъ и при помощи другихъ ихъ концовъ α, β, γ введемъ

обмотку гальванометра въ какую нибудь сѣть токовъ, напр. α и β съ $+$, а γ съ $-$. Къ узлу (abc) будутъ подходить два тока, обѣгающіе раму по проволокамъ

$$\alpha A a \quad \text{и} \quad \beta B b$$

въ одномъ направленіи, и отъ этого узла будетъ уходить одинъ токъ, обѣгающій раму по проволокѣ

$$c C \gamma$$

въ противоположномъ направленіи. Неподвижность магнита покажетъ, что послѣдній токъ равенъ суммѣ двухъ первыхъ.

Контрольный опытъ, показывающій, что равновѣсіе магнита происходитъ не отъ отсутствія тока, можно произвести такъ: соединивъ вмѣстѣ концы b, c, α трехъ проволокъ, введемъ при помощи концовъ β, γ, a обмотку въ сѣть токовъ такъ же, какъ въ только что описанномъ опытѣ, т. е. β и γ съ $+$ и a съ $-$. Къ узлу $(bc\alpha)$ опять будутъ подходить два тока и уходить одинъ, но теперь всѣ три тока обѣгутъ раму въ одномъ направленіи и равновѣсія магнита не будетъ.

4. *Повѣрка формулы Ома по способу Пулье.* Тутъ можно произвести два ряда опытовъ:

1) Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда сопротивленіе элемента ничтожно въ сравненіи съ сопротивленіемъ одной проволоки гальванометра.

Сообщивъ концы a и α первой проволоки съ полюсами элемента, будемъ имѣть

$$i_1 = \frac{e}{r},$$

гдѣ i_1 — сила тока, e — электровозбудит. сила элемента и r — сопротивленіе каждой проволоки гальванометра.

Соединивъ теперь вмѣстѣ концы α и b двухъ проволокъ, сообщимъ другіе ихъ концы a и β съ полюсами того же элемента, получимъ

$$i_2 = \frac{e}{2r} = \frac{i_1}{2}.$$

Наконецъ, соединивъ α съ b, β съ c, и a и γ съ полюсами элемента, будемъ имѣть:

$$i_3 = \frac{e}{3r} = \frac{i_1}{3}.$$

Такъ какъ токъ i_2 во второмъ опытѣ дѣлаетъ вокругъ рамы два оборота, а токъ i_3 въ третьемъ опытѣ—три оборота, то дѣйствіе на магнитъ во всѣхъ трехъ опытахъ должно быть одинаково, что и покажетъ одинаковое отклоненіе магнита.

Ясно, что для разсматриваемаго случая безразлично, будетъ ли приборъ гальванометромъ или просто гальваноскопомъ.

2) Пусть теперь сопротивленіе элемента (или батареи) какое угодно, лишь бы оно не было очень велико въ сравненіи съ со-

противленіемъ обмотки гальванометра. Сдѣлаемъ четыре опыта и предположимъ, что приборъ построенъ какъ тангенсъ-гальванометръ.

I. Сообщивъ концы a и α первой проволоки съ полюсами батареи, будемъ имѣть

$$i_1 = \frac{e}{\rho + r} = k \,.\, \operatorname{tg}\alpha_1$$

гдѣ ρ — сопротивленіе батареи, α_1 — отклоненіе магнита и k — постоянная гальванометра.

II. Соединивъ попарно концы a, b и α, β, сообщимъ точки (ab) и $(\alpha\beta)$ съ полюсами той же батареи. Тогда

$$i_2 = \frac{e}{\rho + \frac{r}{2}} = k \,.\, \operatorname{tg}\alpha_2.$$

III. Образовавъ узлы (abc) и $(\alpha\beta\gamma)$, сообщимъ ихъ съ полюсами батареи. Получимъ

$$i_3 = \frac{e}{\rho + \frac{r}{3}} = k \,.\, \operatorname{tg}\alpha_3.$$

IV. Соединивъ, наконецъ, (αb), $(\beta\gamma)$, и сообщивъ затѣмъ концы a и c съ полюсами батареи, получимъ токъ

$$i_4 = \frac{e}{\rho + 3r},$$

идущій черезъ всѣ три проволоки и дѣлающій два оборота въ одномъ направленіи, а третій въ противоположномъ. На магнитъ дѣйствуетъ только одинъ оборотъ и слѣдовательно:

$$i_4 = \frac{e}{\rho + 3r} = k \,.\, \operatorname{tg}\alpha_4.$$

Комбинируя полученныя формулы, найдемъ

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\rho + \frac{r}{2}}{\rho + r}$$

$$\frac{i_1}{i_3} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_3} = \frac{\rho + \frac{r}{3}}{\rho + r}$$

$$\frac{i_1}{i_4} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_4} = \frac{\rho + 3r}{\rho + r}$$

откуда слѣдуетъ:

$$1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{r}{2}}{\rho + r}$$

$$1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_3} = \frac{\frac{2r}{3}}{\rho + r}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_4} - 1 = \frac{2r}{\rho + r}.$$

И наконецъ:

$$2\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_4} - 1\right).$$

Вставляя въ эти выраженія замѣченныя на опытѣ отклоненія

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4$$

магнита, можно убѣдиться въ равенствѣ полученныхъ результатовъ.

5. *Свойство токовъ, идущихъ по разнымъ частямъ замкнутой проволоки.* (Вторая теорема Кирхгофа). Соединивъ α съ b, β съ c и γ съ a, образуемъ, такимъ образомъ, изъ обмотки замкнутую проволоку:

$$(\gamma a) - \mathrm{A} - (\alpha b) - \mathrm{B} - (\beta c) - \mathrm{C} - (\gamma a) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и при помощи точекъ

$$(\gamma a), \ (\alpha b), \ (\beta c)$$

введемъ эту проволоку въ какую либо сѣть токовъ. Въ проволокахъ

$$a\mathrm{A}\alpha, \ b\mathrm{B}\beta, \ c\mathrm{C}\gamma$$

пойдутъ токи въ зависимости отъ тѣхъ электризацій (потенціаловъ), которыя установятся въ точкахъ (γa), (αb) и (βc). Обозначивъ эти потенціалы черезъ

$$\mathrm{P}_{\gamma a}, \ \mathrm{P}_{\alpha b}, \ \mathrm{P}_{\beta c},$$

а токи черезъ

$$\mathrm{I}_{a\mathrm{A}\alpha}, \ \mathrm{I}_{b\mathrm{B}\beta}, \ \mathrm{I}_{c\mathrm{C}\gamma}$$

будемъ имѣть:

$$r \cdot \mathrm{I}_{a\mathrm{A}\alpha} = \mathrm{P}_{\gamma a} - \mathrm{P}_{\alpha b}$$

$$r \cdot \mathrm{I}_{b\mathrm{B}\beta} = \mathrm{P}_{\alpha b} - \mathrm{P}_{\beta c}$$

$$r \cdot \mathrm{I}_{c\mathrm{C}\gamma} = \mathrm{P}_{\beta c} - \mathrm{P}_{\gamma a}$$

откуда

$$\mathrm{I}_{a\mathrm{A}\alpha} + \mathrm{I}_{b\mathrm{B}\beta} + \mathrm{I}_{c\mathrm{C}\gamma} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Предположимъ, что

$$P_{\gamma a} > P_{\alpha b} > P_{\beta c}\,.$$

Этимъ предположеніемъ мы не нарушаемъ общности, такъ какъ замкнутую нашу проволоку (1) мы всегда можемъ, дѣлая круговое перемѣщеніе буквъ, представить такимъ порядкомъ этихъ буквъ, что точки (γa), (αb), (βc) соединенія концовъ расположатся въ порядкѣ убывающихъ потенціаловъ въ этихъ точкахъ. При такомъ предположеніи токъ $I_{cC\gamma}$ въ проволокѣ $cC\gamma$ будетъ отрицательный, т. е. будетъ направленъ въ порядкѣ буквъ γCc; токъ этотъ, слѣдовательно, обѣжитъ раму въ направленіи противоположномъ съ двумя другими токами и равновѣсіе магнита покажетъ справедливость равенства (2), представляющаго частный случай 2-ой теоремы Кирхгофа.

Легко произвести контрольный опытъ, показывающій, что равновѣсіе магнита происходитъ не отъ отсутствія тока. Сдѣлаемъ соединеніе:

$$(ab) - B - (\beta c) - C - (\gamma\alpha) - A - (ab)$$

и при помощи точекъ

$$(ab),\ (\beta c),\ (\gamma\alpha)$$

образуемъ прежнюю сѣть токовъ. Предположивъ, что

$$P_{\alpha\gamma} > P_{\beta c} > P_{ab}$$

увидимъ, что три тока, удовлетворяющіе равенству (2), обѣгутъ теперь раму въ одномъ направленіи и равновѣсія магнита не будетъ.

6. *Развѣтвленные токи.* Соединивъ α съ b, β съ c и γ съ a, сообщимъ точки (γa) и (αb) съ полюсами батареи. Токъ, идущій изъ полож. полюса батареи, въ точкѣ (γa) раздѣлится на два: одинъ i сдѣлаетъ вокругъ рамы одинъ оборотъ по проволокѣ $aA\alpha$, а другой—i_1 сдѣлаетъ два оборота въ противоположномъ направленіи по проволокамъ γCc и βBb. Равновѣсіе магнита покажетъ, что второй токъ вдвое слабѣе перваго.

Разсмотрѣнный опытъ, очевидно, представляетъ частный случай предыдущаго опыта, а потому на контрольномъ опытѣ мы не останавливаемся. *Ф. П. В.* (Спб.).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Поглощеніе газовъ водой. Какъ извѣстно, коэффиціенты поглощенія такъ наз. „постоянныхъ газовъ" въ водѣ уменьшаются при увеличеніи температуры. Точной зависимости между этими двумя величинами, однако, до сихъ поръ не было найдено. Winkler дѣлаетъ слѣд. выводы изъ своихъ опредѣленій коэффиціен-

товъ поглощенія водорода, азота, кислорода, окиси углерода и окиси азота:

Выраженныя въ процентахъ, разности величинъ коэффиціентовъ поглощенія различныхъ газовъ (при одинаковой разности температуръ) пропорціональны корнямъ кубичнымъ изъ ихъ молекулярныхъ вѣсовъ.

Если μ — внутреннее треніе воды при одной температурѣ, а μ_1 — при другой, если β и β_1 — коэффиціенты поглощенія для тѣхъ же температуръ, m — молекулярный вѣсъ, то:

$$\frac{\beta - \beta_1}{\beta} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu} \cdot \frac{\sqrt[3]{m}}{k},$$

гдѣ k — нѣкоторая постоянная для вышеназванныхъ 5-и газовъ величина, равная въ среднемъ 3,785.

Если принять, что каждая частица жидкой воды состоитъ изъ трехъ частицъ, выражаемыхъ, формулой $H_2O = 18$, то молекулярный вѣсъ воды $M = 54$ и $\sqrt[3]{54} = 3,7798$ близко подходитъ къ среднему значенію $k = 3,785$. Поэтому

$$\beta_1 = \beta - \frac{\mu - \mu_1}{\mu} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{M}}.$$

Вычисленныя по этой формулѣ значенія коэффиціентовъ поглощенія для различныхъ температуръ довольно хорошо согласуются съ найденными непосредственно.

Конечно и измѣненія объема воды въ зависимости отъ температуры вліяютъ на величины коэффиціентовъ поглощенія. *В. Г.*

Расширеніе хлора подъ дѣйствіемъ свѣта. *Видде* въ 1871 г. показалъ, что подъ дѣйствіемъ свѣтовыхъ лучей, особенно съ небольшой длиной волны, хлоръ расширяется больше, чѣмъ другіе газы. Теперь Richardson (Phil. Mag.) занялся изслѣдованіемъ этого явленія. Употребляя дифференціальный термометръ Румфорда, одинъ изъ шариковъ котораго наполненъ хлоромъ, а другой воздухомъ, съ индексомъ изъ сѣрной кислоты, онъ подтвердилъ наблюденія Видде, показалъ, что при разбавленіи хлора воздухомъ способность его расширяться подъ дѣйствіемъ свѣта уменьшается пропорціонально содержанію хлора, и что температура не вліяетъ на эту способность хлора. Основываясь на этихъ явленіяхъ, онъ построилъ приборъ для регистрированія актиническаго дѣйствія дневнаго свѣта. *В. Г.*

Объясненіе образованія нѣкоторыхъ формъ градинъ пр. *Н. Гезехуса.* Просматривая приложенныя къ „Метеорологическому Обозрѣнію“ проф. А. В. Клоссовскаго таблицы рисунковъ градинъ, авторъ замѣтилъ, что нѣкоторыя формы градинъ могутъ быть произведены искусственно. Если капли, находящіяся на покрытыхъ слоемъ сала или порошка ликоподія часовыхъ стеклышкахъ, выставить на морозъ, то, вслѣдствіе расширенія воды при замер-

занія, на каждой каплѣ получается бугорокъ, а иногда капли принимаютъ видъ конуса. Для удобства опытовъ авторъ бралъ вмѣсто воды сюрьму, какъ обладающую тѣмъ же свойствомъ расширяться при затвердѣваніи, какъ и вода. Расплавленную въ ложкѣ сюрьму погружали въ воду; если сюрьма застывала въ ложкѣ, то на верхней части сюрьмяной капли получался коническій или цилиндрическій выступъ. Иногда на выступахъ замѣчались впадины, изъ которыхъ часть жидкой сюрьмы была выброшена въ воду; кромѣ того на верхней поверхности всѣхъ капель замѣчались концентрическія полосы, на которыхъ иногда оказывались и радіальныя полосы. Поверхность нѣкоторыхъ капель представляла зернистое строеніе и кристаллическій изломъ; внутри нѣкоторыхъ капель попадались пустоты, сообщающіяся при помощи очень тонкихъ каналовъ съ наружною поверхностью. Если же расплавленную сюрьму вылить въ воду, то она разбивается на мелкія капли сферической или овальной формы. Немногія только имѣютъ острые отростки, углубленія и пустоты. Нѣкоторыя капли при паденіи разсыпались вслѣдствіе взрыва и превращались въ мелкій порошокъ. Верхушки и выступы иныхъ капель имѣли кристаллическое строеніе, при чемъ общая форма ихъ сплюснутая, снизу гладкая, а сверху покрытая концентрическими ступенькам и радіальными черточками.

Естественныя градины имѣютъ много общаго съ искусственными: тѣ же выступы и бугорки, иногда кристаллическіе. Если капля застываетъ неравномѣрно, то выступы принимаютъ другой характеръ; такъ, если вращающаяся капля подвергалась болѣе сильному охлажденію со стороны полюсовъ, то выступъ получается по экватору въ видѣ кольца, при чемъ это кольцо можетъ распасться и образовать впадину по поясу; напротивъ, при болѣе сильномъ охлажденіи экватора, образуются два конуса, сложенные основаніями, или же два выступа. Такъ точно нѣкоторыя изъ градинъ имѣютъ концентрическія кривыя и радіальныя черточки, на иныхъ же сидятъ ледяные кристаллы.

Такимъ образомъ происхожденіе разныхъ видовъ градинъ авторъ сводитъ къ четыремъ слѣдующимъ группамъ:

1) *Правильныя формы градинъ, сфероиды, эллипсоиды вращенія, отдѣльныя мелкіе кристаллы.* Эти формы образуются при равномѣрномъ замерзаніи и послѣдовательномъ наслоеніи.

2) *Формы сфероидальныя съ разнообразными выступами, иногда кристаллическими.* Условія образованія этихъ формъ — неравномѣрное замерзаніе и прорывъ оболочки расширившеюся внутри массою градины.

3) *Неправильныя формы, обусловленныя смерзаніемъ нѣсколькихъ градинъ и наслоеніемъ.*

4) *Разнообразныя формы осколковъ, какъ шаровые секторы, пластинки, кристаллы.*

П. П.

ЗАДАЧИ.

№ 356. Найти двузначное число, котораго наименьшій дѣлитель (большій единицы) равенъ суммѣ его цыфръ.

(Заимств.) *Ш.*

№ 357. На сторонахъ треугольника ABC строимъ внѣшніе треугольники: ABM, BCN и CAP такъ, чтобы AM = AP, MB = = BN и NC = CP. Требуется доказать, что перпендикуляры, опущенные изъ M, N и P соотв. на AB, BC и CA, пересѣкутся въ одной точкѣ. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 358. Опредѣлить сторону равносторонняго треугольника, вершины коего расположены на трехъ данныхъ концентрическихъ окружностяхъ радіусовъ r_1, r_2, r_3. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 359. Вписать въ данную окружность равнобедренный треугольникъ, когда извѣстна сумма высоты и основанія.

А. Бобятинскій (Барнаулъ).

№ 360. Даны два равносторонніе треугольника ABC и ABD, имѣющіе одну сторону общую. Черезъ D проводимъ сѣкущую, которая пересѣкаетъ сторону AC въ E и сторону BC — въ F. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ BE и AF.

А. Бобятинскій (Барнаулъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 205 (2 сер.). Показать, что если $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, то

$$(1 - Sn\alpha)(1 - Sn\beta)Cs\gamma + (1 - Sn\beta)(1 - Sn\gamma)Cs\alpha +$$
$$+ (1 - Sn\gamma)(1 - Sn\alpha)Cs\beta = Cs\alpha Cs\beta Cs\gamma.$$

Раскрывая скобки въ лѣвой части, получимъ выраженіе, которое можно представить въ такомъ видѣ:

$$Cs\alpha + Cs\beta + Cs\gamma - (Sn\alpha Cs\gamma + Sn\gamma Cs\alpha) - (Sn\beta Cs\gamma + Sn\gamma Cs\beta) -$$
$$- (Sn\beta Cs\alpha + Sn\alpha Cs\beta) + Sn\alpha Sn\beta Cs\gamma + Sn\beta Sn\gamma Cs\alpha + Sn\gamma Sn\alpha Cs\beta,$$

или, замѣтивъ, что

$$Sn\alpha Cs\gamma + Sn\gamma Cs\alpha = Sn(\alpha + \gamma) = Cs\beta,$$
$$Sn\beta Cs\gamma + Sn\gamma Cs\beta = Sn(\beta + \gamma) = Cs\alpha$$

и $$Sn\beta Cs\alpha + Sn\alpha Cs\beta = Sn(\alpha + \beta) = Cs\gamma,$$

и сокративъ подобные члены, получимъ:

$$Sn\alpha Sn\beta Cs\gamma + Sn\gamma Sn\beta Cs\alpha + Sn\alpha Sn\gamma Cs\beta = Cs\alpha Cs\beta Cs\gamma.$$

Выводя въ первомъ и послѣднемъ членѣ лѣвой части $Sn\alpha$ за скобки, представимъ ихъ въ видѣ:

$$Sn\alpha(Sn\beta Cs\gamma + Sn\gamma Cs\beta) = Sn\alpha Sn(\beta + \gamma) = Sn\alpha Sn(90 - \alpha) = Sn\alpha Cs\alpha,$$

откуда все уравненіе принимаетъ видъ:

$$\text{Sn}\alpha\text{Cs}\alpha + \text{Sn}\gamma\text{Sn}\beta\text{Cs}\alpha = \text{Cs}\alpha\text{Cs}\beta\text{Cs}\gamma$$

или
$$\text{Cs}\alpha(\text{Sn}\alpha + \text{Sn}\beta\text{Sn}\gamma) = \text{Cs}\alpha\text{Cs}\beta\text{Cs}\gamma;$$

но $\text{Sn}\alpha = \text{Sn}[90 - (\beta + \gamma)] = \text{Cs}(\beta + \gamma) = \text{Cs}\beta\text{Cs}\gamma - \text{Sn}\beta\text{Sn}\gamma.$

Подставивъ найденную для $\text{Sn}\alpha$ величину и сокращая подобные члены, находимъ тожественно

$$\text{Cs}\alpha\text{Cs}\beta\text{Cs}\gamma = \text{Cs}\alpha\text{Cs}\beta\text{Cs}\gamma.$$

А. П. (Пенза), *И. Вонсикъ* (Воронежъ), *Я. Тепляковъ* (Радомысль).

№ 218 (2 сер.). Въ данный треугольникъ вписать ромбъ, площадь котораго вдвое менѣе площади треугольника и вычислить діагонали ромба.

Раздѣливъ боковыя стороны AB и BC треугольника ABC пополамъ и соединивъ ихъ середины линіей EF, изъ точекъ E и F опишемъ дуги радіусомъ EF, которыя вообще пересѣкутъ сторону AC въ 4 точкахъ: G, G' и H, H'. Соединивъ точки G и H или G' и H' соотвѣтственно съ E и F, получаемъ искомый ромбъ, ибо площадь его $EF \cdot \frac{h}{2} = {}^1/_2 \frac{AC \cdot h}{2}$ (гдѣ h — высота треугольника)

Если основаніе треугольника m, а высота h, то площадь его $= \frac{mh}{2}$, а площадь искомаго ромба $= \frac{mh}{4}$. Площадь каждаго изъ 4 прямоугольныхъ треугольниковъ, на которые дѣлится ромбъ діагоналями x и y, равна $\frac{xy}{8} = \frac{mh}{16}$, откуда $2xy = mh$ (1). Въ то же время, имѣемъ: $x^2 + y^2 = m^2$ (2) Сложивъ ур. 1 и 2 послѣ извлеченія корня получаемъ: $x + y = \sqrt{m(m + h)}$ и изъ (1) имѣемъ $xy = \frac{mh}{2}$. Считая x и y корнями квадратнаго уравненія: $z^2 - z\sqrt{m(m + h)} + \frac{mh}{2} = 0$, опредѣляемъ

$$x = {}^1/_2(\sqrt{m(m + h)} + \sqrt{m(m - h)})$$

$$y = {}^1/_2[\sqrt{m(m + h)} - \sqrt{m(m - h)}].$$

Изъ этихъ уравненій видно, что, въ зависимости отъ того какая изъ сторонъ треугольника принята за основаніе, задача дѣлается невозможною при $m < h$. при $m > h$, задача имѣетъ два рѣшенія (симметричныя) когда m есть наименьшая изъ сторонъ,

одно рѣшеніе-когда m есть средняя изъ сторонъ, и ни одного рѣшенія—когда m наибольшая изъ сторонъ. При $m = h$, впис. ромбъ превращается въ квадратъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *В. Россовская* (Курскъ), *П. Андреяновъ* (Москва), *И. Бискъ* (Кіевъ), *К. Щиголевъ* (6 кл. Курск. г.)

№ 254 (2 сер.). Двѣ окружности радіусовъ r и R касаются внѣшне; линія центровъ пересѣкаетъ ихъ соотвѣтственно въ точкахъ A и B. Изъ точки A проведены касательныя къ окружности радіуса R и изъ точки B — касательныя къ окружности радіуса r. Опредѣлить разстояніе MN между точками пересѣченія этихъ касательныхъ.

Пусть линія AM касается окружности радіуса R (центръ O′) въ точкѣ Q, а линія BM — окружности радіуса r (центръ O) въ точкѣ P. Опустимъ изъ M на AB перпендикуляръ MK.

Изъ подобныхъ △△ BKM и BOP находимъ

$$\frac{BK}{KM} = \frac{BP}{OP}.$$

Изъ △△ AKM и AO′Q

$$\frac{AK}{KM} = \frac{AQ}{O'Q}.$$

Складывая эти равенства, получимъ

$$\frac{BK + AP}{KM} = \frac{BP \,.\, O'Q + OP \,.\, AQ}{OP \,.\, O'Q},$$

но

$$BP = 2\sqrt{(r + R)R} \quad \text{и} \quad AQ = 2.\sqrt{(r + R)r},$$

поэтому

$$KM = \frac{2Rr(R + r)}{2\sqrt{R + r}(R\sqrt{R} + r\sqrt{r})} = \frac{Rr\sqrt{R + r}}{R\sqrt{R} + r\sqrt{r}}.$$

$$MN = 2KM.$$

Н. Николаевъ (Пенза), *А. Байковъ*, *П. Андреяновъ* (Москва), *В. Костинъ* (Симбирскъ), *Ч. Рыбинскій* (Скопинъ), *Я. Тепляковъ* (Радомысль), *К. Щиголевъ* и *Н. Платоновъ* (Курскъ).

Конецъ XII-го Семестра.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса 25 Іюля 1892 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.